MA1111—Primer Parcial, (30 %)—A— Soluciones

1. (3pts.) Considere la función $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$. Diga si $g(x)$ es: una función par, una función impar o no es de ninguno de esos dos tipos. Justifique su respuesta.

   Resolución: $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ es una función impar ya que

   $$g(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+2} = -\frac{2x}{x^2+2} = -g(x).$$

2. (7pts.) Sean las rectas r_1 y r_2 definidas por las ecuaciones:

   $$r_1 \quad : \qquad y = x$$
   $$r_2 \quad : \quad x + y = 4.$$

   a) (2 pts.) Halle el punto C de intersección de r_1 y r_2.
   Resolución:

   $$\begin{cases} y = x \\ x + y = 4. \end{cases} \Rightarrow \quad x = y = 2 \;\Rightarrow\quad C = C(2,2).$$

   b) (3 pts.) Halle la ecuación de la circunferencia de centro C que pasa por el origen $(0;0)$.
   Resolución: La distancia de $C(2,2)$ al origen es $2\sqrt{2}$, por lo que la ecuación es

   $$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \;;\; x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$$

   c) (2 pts.) Halle la ecuación de la recta tangente en el origen a la circunferencia hallada en la parte anterior.
   Resolución: $m_{OC} = \frac{2-0}{2-0} = 1$; por lo que $m_{\perp} = -1$. Entonces,

   $$\frac{y-0}{x-0} = -1 \;;\; x + y = 0.$$

3. (6pts.) Resuelva la inecuación:

   $$8|-x| - |2x-1| \leq 3.$$

   Resolución:

   $$8|-x| = 8|x| = \begin{cases} 8x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -8x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   $$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

   El conjunto de las soluciones es la unión de los tres conjuntos representados por:

   $$A_1 = \begin{cases} x < 0 \\ -8x - (1-2x) \leq 3 \end{cases} \Rightarrow A_1 = [-\frac{2}{3}, 0)$$

   $$A_2 = \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 8x - (1-2x) \leq 3 \end{cases} \Rightarrow A_2 = [0, \frac{2}{5}]$$

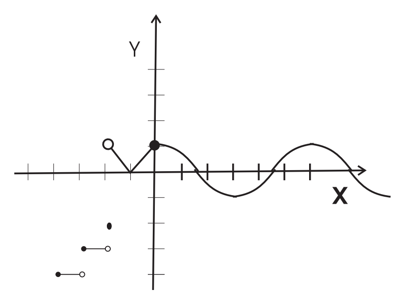
   $$A_3 = \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \\ 8x - (2x-1) \leq 3 \end{cases} \Rightarrow A_3 = \emptyset$$

   Sol: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{5}]$

4. (7pts.) Considere la función $f(x)$ dada por:

   $$f(x) = \begin{cases} [x] & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ |x+1| & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ \cos(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   a) (3 pts.) Dibuje la gráfica de $f(x)$. **Resolución:**

   b) (2 pts.) Halle el rango (o imagen) de la función $f(x)$. **Resolución:**

   $$\text{Rango } = \{-4,-3,-2\} \cup [-1,1].$$

c) (2 pts.) ¿Es inyectiva la función $f(x)$? Justifique su respuesta. **Resolución:** No es inyectiva ya que por ejemplo: $f(-1) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

5. (7pts.) Sean $f(x)$ y $g(x)$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

a) (4 pts.) Halle la función compuesta $h = f \circ g$. **Resolución:** $h(x) = f(g(x))$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3} & \text{si} \quad x^2 + 2x - 3 < 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{si} \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Analizando los signos de $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ tenemos que $x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$. Así que tenemos

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3} & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{si} \quad x \leq -3, \ \text{o} \ , x \geq 1. \end{cases}$$

b) (3 pts.) Halle la función inversa f^{-1}. **Resolución:**

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$